ПСИХОЛОГИЯ СОЗНАНИЯ

ПСИХОЛОГИЯ В КОНТУРАХ ПРОЦЕССА ПОЗНАНИЯ
Пролегомены к учебнику для аспирантов

(Часть 4)

© Аллахвердов В.М.
Д.пс.н., профессор, кафедра общей психологии,
факультет психологии СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия
vimiall@gmail.com

Математика как способ познания

На заре Нового времени Ф. Бэкон сформулировал исходную установку науки: «*тонкость природы во много раз превосходит тонкость наших рассуждений*». Это значит, что как бы блестящи ни были наши умозрительные построения, они не смогут соревноваться с соразмерностью и логической стройностью, присущей природе. Исходя из этой установки, доказавшей свою эвристичность всей историей науки, можно было бы предположить, что заданный природой способ познания должен быть самым совершенным. Как же могут выглядеть способы познания мира, тем более самый совершенный из них?

Всеми признается, что математика играет огромную роль в познании реального мира. Уже Пифагор учил: *числа правят миром*. Древние греки уточнили: законы природы постижимы для человеческого разума, и математика – ключ к их познанию. *Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук и в том, что не имеет связи с математикой (*Леонардо да Винчи*)*. Галилей объяснил: *величественная книга природы написана на языке математики, а читать ее может линь тот, кто сначала научится постигать ее язык и толковать знаки, которыми она написана.*

Вопрос для размышления. На каком языке написана книга природы, не дано знать никому. Может быть, правильнее было бы сказать, что человек пытается прочесть книгу природы, используя именно этот язык? «*Мы не знаем другого способа точного описания мира или способа увидеть его внутренние взаимосвязи без математики*» (Р. Фейнман).

Предположим, что языки мозга, психики и сознания – это языки математики. Тогда самый совершенный способ познания должен быть написан на этом языке. Однако возникает проблема. Если мы познаем мир совершенным способом, то полученный результат познания тоже должен быть самым совершенным, наилучшим образом соответствуя реальности. И если бы существовал какой-то один самый совершенный способ познания, то не требовалось бы каких-то дополнительных инструментов познания наподобие психики и сознания. По сути, это утверждение, хоть прямо и невысказанное, лежит в основании наивного реализма. Однако из-за отсутствия всеобщего критерия истинности оно оказывается неверным.

Как ни удивительно, сами математики доказали, что самого совершенного алгоритма познания не может существовать. Главный удар по представлению о существовании такого алгоритма в XX в. нанес К. Гёдель, доказав «теорему о неполноте»: любая строго сформулированная математическая система, которая включает в себя натуральные числа, всегда неполна. Она содержит высказывания, истинность которых не может быть ни доказана, ни опровергнута в рамках этой системы. Это значит, что если мы в своих построениях используем арифметику, то не существует алгоритма, способного решить все возникающие задачи. Поскольку вряд ли удастся описать процесс познания, не использующего арифметические расчеты, то алгоритм познания, решающего все познавательные задачи, не может существовать.

Далее различные теоремы о невозможности существования самого совершенного алгоритма познания посыпались, как грибы. Нельзя, например, определить полный набор всех истинных предложений, выводимых из данного набора аксиом (теорема Лёвенгейма–Сколема). Из теоремы Чёрча–Тьюринга следует, что не существует алгоритма, способного заранее определить, какие именно задачи не могут быть решены. И т.д. Для примера того, как подобные результаты получают математики, изложим, не претендуя на формальную строгость, идею доказательства последней теоремы.

Допустим (от противного), что существует алгоритм *A*, который всегда может правильно определить, будет задача решена или нет, сможет ли решающая эту задачу программа когда-нибудь остановиться или она будет работать бесконечно (зацикливаться). Пусть алгоритм *A*: а) выдает 1, если программа придет к успеху за конечное число шагов и остановится; б) выдает 0, если программа будет работать бесконечно. Теперь создадим программу *P*, которая будет работать так: а) если алгоритм *A* выдает 0, программа *P* останавливается; б) если алгоритм *A* выдает 1, программа *P* преднамеренно зацикливается и будет работать бесконечно. Поскольку алгоритм *A* применим, по предположению, к любым программам, то оценим с помощью алгоритма *A* остановится программа *P* или она зациклится. Если программа *P* останавливается, то *A* должен выдать 1. Но когда *A* выдает 1, программа *P* будет зацикливаться. Если программа *P* должна будет работать бесконечно, то алгоритм *A* выдает 0. Однако это означает, что программа *P* остановится.

Итак, существует программа, и ни один алгоритм не способен правильно определить, остановится эта программа или нет. Следовательно, исходное допущение неверно. Алгоритма, способного определить, решается ли любая задача, не существует.

Доказательство построено по той же схеме, как известный парадокс лжеца: если некий человек говорит фразу «я лгу», то он лжет в том случае, если сказанное – правда, если же он говорит правду, то произнесенная им фраза этому противоречит, поэтому сказанное ложно. В итоге нельзя решить, сказал ли человек правду или ложь. Иногда этот парадокс называют парадоксом критянина Эпименида, который, по свидетельству апостола Павла, однажды заявил: все критяне – лжецы. Если Эпименид сказал правду, то он и сам, как критянин, лжец, а потому он солгал. Пару древнегреческих философов охватил такой ужас от неудачных попыток разрешить этот парадокс, что они покончили с собой.

Вопрос для размышления. Можно ли считать знаменитую строку Ф.И. Тютчева «*Мысль изреченная есть ложь*» примером парадокса лжеца?

К. Гёдель для доказательства теоремы о неполноте заменил слово «ложно» на «недоказуемо» и, придумав, как пронумеровать все возможные утверждения числами, сконструировал такое число, которое утверждает о себе, что оно недоказуемо.

Все математические доказательства опираются на аксиомы. В течение веков аксиомы воспринимались как очевидные истины, не требующие доказательств. Однако с начала XIX в. с появлением неэвклидовой геометрии, заменившей одну из аксиом Эвклида на другую, это убеждение было разрушено. Очевидность аксиом была поставлена под сомнение.

Всегда ли, например, верна аксиома транзитивности: если $a < b$, а $b < c$, то $a < c$?

Красивые примеры приводит А.Н. Поддьяков. Известна детская игра «камень-ножницы-бумага»: камень выигрывает у ножниц, ножницы выигрывают у бумаги, а бумага выигрывает у камня. Аксиома транзитивности нарушена. Рассмотрим числовой пример. Есть три набора из трех карандашей разной длины: а) 2, 4, 9; б) 1, 6, 8; в) 3, 5, 7. Сравниваем по длине каждый карандаш из каждого набора с карандашами из других наборов. Карандаши из первого набора при попарных сравнениях выигрывают по длине у карандашей из второго набора – в 5 попарных сравнениях из 9 возможных: самый длинный карандаш первого набора длиннее всех трех карандашей второго набора; остальные два карандаша первого набора длиннее самого короткого карандаша второго набора. Аналогично: карандаши из второго набора выигрывают у карандашей из третьего набора 5 раз из 9 попарных сравнений. Однако карандаши из третьего – также 5 раз из 9 выигрывают у карандашей из первого набора. Аксиома транзитивности снова нарушена. Следовательно, может быть поострена математика с аксиомой транзитивности и математика, отвергающая эту аксиому.

Доказательство теоремы Чёрча-Тьюринга также опирается на аксиомы, в частности, на закон исключенного третьего: верно или *A*, или *не-A*, третьего не дано (*tertiumnondatur*). Казалось бы, уж это очевидная истина. Любое суждение или истинно, или ложно. Либо «на столе лежит книга», либо «на столе книга не лежит». Как может быть иначе? Именно благодаря этой аксиоме можно доказывать теоремы от противного: допускать, что доказываемая теорема неверна, а если в результате этого предположения придем к противоречию, то, следовательно, верно обратное: доказываемая теорема верна.

Но вот математик А. Гейтинг – представитель направления математики, на радость психологов именуемого *интуиционизмом,* – приводит такой пример. Возьмем пары идущих подряд простых чисел, разница между которыми равна двум (например, 3 и 5, 11 и 13, 17 и 19 и т. д.). Число таких пар в бесконечном ряду натуральных чисел или конечно, или бесконечно. Определим число N следующим образом: $N = 0$, если число таких пар конечно; $N = 1$, если число таких пар бесконечно. Итак, число N однозначно определено. Но чему оно равно? Не знаем. Потому что не знаем, конечен ли набор рассматриваемых пар. Это значит, говорят приверженцы математического интуиционизма, что закон исключенного третьего не всегда верен. Стоит принять иной закон: или *A*, или *не-A*, или третье – не знаем. Приняв новую аксиому, была построена новая математика, в которой уже нельзя опираться на доказательства от противного.

Аксиом, всегда истинных, не существует. Но если это так, то можно строить разные математики, опираясь в них на разные аксиомы. *Аксиомы – это свободные творения человеческого разума* (Альберт Эйнштейн).

Что же тогда значат логические или математические доказательства, которые доказывает истинность теоремы сведением ее к аксиомам, об истинности которых ничего нельзя утверждать? Неужели математические доказательства – это всего лишь мнемонические правила для запоминания теорем, как утверждают некоторые математики? *Многих работающих математиков смущает вопрос, чем же являются доказательства, раз они не могут доказывать* (Имре Лакатос).

Строго говоря, того, что принято считать математическим доказательством, не существует… Любое доказательство представляет собой то, что мы с Литлвудом называем газом, – риторическими завитушками, предназначенными для психологического воздействия, картинками, рисуемыми на доске во время лекции, выдумками для стимуляции воображения учеников (Годфри Харди).

Попробуем разобраться.

Язык математики

Рассмотрим язык, которым пользуются математики. *Во-первых,* как и в любом языке, нужны слова. Для того, однако, чтобы дать определение любого слова, уже нужны какие-то слова, которые тоже надо определить с помощью иных слов, а те, в свою очередь, тоже надо определять, и т.д. Чтобы избавиться от «дурной бесконечности», математики используют исходный набор слов, не имеющих никакого определения. Они вводят слова, которые вообще не надо определять, которые сами по себе ничего не означают. Математики избегают, тем самым, и порочного круга, когда одно слово определяется через другое слово, а это другое слово определяется с помощью нового слова и т.д. до тех пор, пока последнее слово не получит определение с помощью первого – обычно именно так даются определения в толковых словарях. (Известный пример такого круга, придуманный С. Лемом: «СЕПУЛЬКИ – важный элемент цивилизации ардритов. См. СЕПУЛЬКАРИИ»; «СЕПУЛЬКАРИИ – устрой ства для сепуления (см.)»; СЕПУЛЕНИЕ – занятие ардритов. См. СЕПУЛЬКИ»).

В математике все используемые слова сводимы к исходному набору. Поскольку слова этого набора ничего не означают, вместо них можно использовать любой другой набор слов – важно лишь, чтобы все эти слова отличались друг от друга. Математики для экономии обычно заменяют их короткими значками, символами, которые сами по себе тоже ничего не значат.

Математика – всего лишь игра, в которую играют согласно простым правилам и пользуются при этом ничего не значащими обозначениями ... Такие слова, как точка, прямая, плоскость, во всех предложениях геометрии можно без ущерба заменить, например, словами стол, стул, пивная кружка (Давид Гильберт).

Набор начальных слов я называю «минимальным словарем» данной науки, если только а) каждое иное слово, употребляемое в науке, имеет определение с помощью слов этого минимального словаря и б) ни одно из этих начальных слов не имеет определения с помощью других начальных слов (Бертран Рассел).

Математика – наука о хитроумных операциях, производимых по специально разработанным правилам над специально придуманными понятиями (Юджин Вигнер).

Во-вторых, вводится грамматика – произвольный набор правил, позволяющих связывать эти слова и символы в правильно построенные предложения. В логике и математике обычно говорят о правильно построенных формулах. Поясним: предложение $(2 + 2) : 4 = 8$ правильно построено по грамматическим правилам арифметики, хотя оно и ложное. А предложение $2\ ++))\text{-}^{3}\ 4{=}8$ – бессмысленный набор арифметических знаков, оно не соответствует грамматическим правилам арифметики.

В-третьих, вводится аксиоматика – набор правильно построенных предложений, которые объявляются истинными без всяких доказательств. Например, в эвклидовой геометрии через каждую точку можно провести бесчисленное число прямых. В псевдоэвклидовой геометрия Минковского вводится дополнительная аксиома: через каждую точку запрещено проводить не менее двух прямых. Почему нет? В итоге в псевдоэвклидовой геометрии неверна теорема Пифагора.

Наконец, *в-четвертых*, указываются правила вывода, позволяющие из принятых за истину предложений выводить другие правильно построенные предложения как истинные (теоремы). Оценке в математике подлежит только одно: может ли данное высказывание быть получено из заданной системы аксиом путем преобразований по заданным правилам вывода из самих этих аксиом. Если преобразования выполнены без ошибок, то в полученном результате в рамках данной математической системы нельзя сомневаться. *Математика*, как говорил Сенека, *не убеждает, а вынуждает*.

Все математические преобразования – это игра со значками, преобразования одних значков в другие по произвольно заданным, но фиксированным правилам. Пусть «точка» и «прямая» сами по себе ничего не означают, но определена вся структура взаимных отношений между этими терминами и всеми другими терминами, принятыми в геометрии. Как в любой игре, в процессе преобразований ни символы, ни знаки не могут изменяться, если это только не оговорено в правилах. Вот один из главных способов математических преобразований: если утверждается, что $A = B$ (A тождественно B), то во всех последующих преобразованиях A можно заменить на B.

Математическое знание не является чем-то таинственным. Оно имеет такую же природу, как и «великая истина», что в метре 100 сантиметров (Бертран Рассел).

Выбор всех слов, правил и аксиом сам по себе произволен. Ни в математике, ни в логике нет критерия оценки истинности высказывания как достоверного высказывания об окружающем мире. Введем, например, аксиомы «некоторые рыбы – авантюристы» и «все авантюристы – воробьи». Отсюда можно сделать логически безупречный вывод, отнюдь не претендующий на истинность как на соответствие действительности: некоторые рыбы – воробьи. Даже арифметика – это не описание реальности, а правила игры с придуманными людьми числами. *2+2* всегда равно *4* только в арифметике. В реальности это может быть неверным: две капли воды плюс еще две капли совсем не обязательно будут равны четырем каплям, два кролика плюс два кролика могут породить сколько угодно кроликов и т.д.

Можно понять тех, кому математика кажется лишь бесплодной и неинтересной игрой. Действительно, математика и даже логика – это всего лишь игра в значки, где все строго однозначно определено правилами. Великий французский математик А. Пуанкаре удивлялся, почему так много людей не понимают, на его взгляд, самую простую и логичную науку – математику. Вроде бы просто, но люди не понимают математику потому, что она воспринимается ими как скучное и бессмысленное занятие! Юный Луи Пастер пишет в письме родителям: «*ничто так не иссушает сердце, как занятия математикой*».

В математике даже нет абсолютно истинных теорем. Они верны только в рамках принятой системы аксиом. В рамках другой системы аксиом могут получаться другие теоремы. Это как бы разные игры (разные математические системы). А правильный ход в одной игре (например, в шахматах) не означает правильный ход в другой (например, в домино).

Математика – такой предмет, в котором мы никогда не знаем ни того, о чем мы говорим, ни насколько верно то, что мы говорим (Бертран Рассел).

Единственное требование к любой математической системе: термины и преобразования, выполненные в рамках этой системы, не должны приводить к противоречию, в противном случае игра теряет смысл. Нельзя, например, в одной математической системе вводить термины: «камень, который разбивает все стекла» и «стекло, которое не может разбить ни один камень». (Более формализовано это противоречие можно выразить так: все X входят во множество M и существует X, который не входит во множество M).

Непротиворечивость – в точном смысле этого термина – должна оставаться важнейшим регулятивным принципом; обнаружение противоречий должно рассматриваться как проблема. Если цель науки – истина, наука должна добиваться непротиворечивости; отказываясь от непротиворечивости, наука отказалась бы и от истины (Имре Лакатос).

Ссылка на опытные данные сама по себе не играет роли в доказательстве верности математических утверждений. В 1742 году Х. Гольдбах опытным путем пришел к предположению, что любое четное число больше двух можно представить в виде суммы двух простых чисел. Предположение Гольдбаха успешно проверено для чисел до 10^{14}, но строго не доказано, а потому не считается верным. «Проблема Гольдбаха» до сих пор всерьез волнует математиков.

Пьер Ферма на полях «Арифметики» Диофанта написал, что он нашел «*замечательное доказательство*» того, что не существует целых чисел X, Y и Z таких, что $X^n + Y^n = Z^n$ для любого $n>2$, но «*поля слишком малы*», чтобы это доказательство уместить. От Ферма осталось мало законченных доказательств его утверждений. Но во всех случаях, когда Ферма сообщал о существовании доказательства, впоследствии его всегда удавалось найти. За одним исключением. За исключением приведенной выше Великой теоремы. Сохранилось лишь доказательство самого Ферма для $n=4$. Эйлер доказывает эту теорему для $n=3$.

В 1825 г. почти одновременно предлагают доказательство для $n=5$ Дирихле и Лежандр… Позднее теорема была доказана для всех $n<100000$. Если теорема верна для ста тысяч наборов бесконечных рядов чисел, то она статистически достоверно верна! Однако статистическая достоверность этого результата мало что значит в математике. Теорему признали верной только в 1995 г., когда Э. Уайлс опубликовал ее строгое доказательство.

Впрочем, с развитием компьютерных вычислений ситуация немного изменилась. Даже появился журнал «Экспериментальная математика». Результатам компьютерных проверок стали отчасти доверять, особенно учитывая теорему Г. Чейтина, что верных, но недоказуемых теорем бесконечно много.

Нельзя создать такую систему правил, которая оказалась бы достаточной для доказательства даже тех арифметических положений, истинность которых, в принципе, доступна для человека с его интуицией и способностью к пониманию (Роджер Пенроуз).

Язык мозга

Теперь сопоставим язык математики с языком мозга. Вот как в самом упрощенном виде представляют себе процесс познания физиологи. Рецепторы (лат. *receptor* – принимающий) воспринимают раздражения из внешней или внутренней среды организма и с помощью нервных импульсов передают информацию о раздражителе в нервную систему. Разные рецепторы реагируют на разный тип раздражителя. Но сами нервные импульсы ничего не сообщают о природе раздражителя, только о его интенсивности и длительности и о том, какой именно рецептор раздражен.

Рецепторы сетчатки глаза – 120 млн. палочек и 6,4 млн. колбочек – реагируют на освещенность и на определенную длину волны света, но передают не свет и цвет, а только информацию о своем раздражении. Поступающая для центральной обработки информация – это всего лишь знаки (сигналы) разных типов, которые уже только потом интерпретируются как сообщающие о той реальности, которая вызвала появление этих сигналов.

Физиологический процесс обработки поступающей информации весьма сложен. Есть, например, клетки зрительной коры, которые избирательны к ориентации предъявляемых линий: одни реагируют на вертикальные линии, другие – на горизонтальные, третьи – на наклон под другим строго определенным углом.

Нейроны, настроенные на определенную ориентацию, образуют колонки размером 100 мкм. Рядом расположенные колонки реагируют на линии с другой ориентацией. Несколько колонок нейронов, которые реагируют на все возможные ориентации, образуют гиперколонку, предназначенную для полной обработки изображения. Но все они передают не информацию об ориентации или изображении, а информацию о своем состоянии.

С появлением и развитием нервной системы, во-первых, принципиально возрастает число существенно различающихся клеточных [т.е. нейронных] *специализаций. Их разнообразие трудноперечислимо и, видимо, огромно. Во-вторых, специализация нейронов устанавливается в отношении элементов индивидуального опыта, … число различающихся наборов клеточных специализаций становится равно числу индивидов* (Алексей Созинов, Юрий Александров).

Рецептор – это не датчик параметров воспринимаемого объекта, а датчик изменений, которые те или иные параметры объекта производят в самом рецепторе.

Наблюдаемое воздействие на наши чувства позволяет составить представление о возможной причине этого действия; хотя, на самом деле, это всегда просто нервные раздражения, но никогда не сами внешние объекты (Герман Гельмгольц).

Перцептивный образ существует именно в виде субъективных качеств, не содержа в себе ничего из вещества стимула (Александр Тхостов).

Воспроизведение [в коре] исходных состояний раздражения рецептора не может со-

здать подобие изображения объекта (Владимир Зинченко).

Поскольку вся сенсорная информация преобразовывается в идентичные нервные импульсы, мозг дифференцирует сенсорные восприятия, выделяя каждой сенсорной системе отдельную зону коры (Ричард Герриг, Филип Зимбардо).

Вот как физиологи и описывают путь познания: ничего не означающие раздражения рецепторов автоматически обрабатываются мозгом по строго определенным правилам. Мозг, иначе говоря, по генетически заданным правилам оперирует ничего не значащими знаками. Но такое описание, по сути, и есть математика.

Подведем итог: определение того, какие цели преследует человек, какие задачи решает, – это поле деятельности психолога; разработка программ, которыми эти задачи могут быть решены, должно быть представлено на языке математики; а то, как эти программы реализуются мозгом, – на языке физиологии.

Наша задача – установить ряд психологических фактов и найти управляющие им общие закономерности; задача физиологии – обосновать эти закономерности данными своей науки (Алексей Леонтьев).

Теория определяет, какую задачу решает познавательный инструмент и для чего он это делает, а теории, посвященные программам и их физическому субстрату, описывают, как именно решатся задача. Нынешние когнитивные исследования посвящены большей частью вопросу «как» – вопросу соотношения программы и инструмента. Ответить на него чрезвычайно сложно, и большинство ученых-когнитивистов чувствуют ущербность стратегии «на ощупь во тьме» (Леда Космидес, Джон Туби).

Какие бы уровни обработки ни рассматривать, они работают только с той информацией, которая используется мозгом, а потому все они должны описываться на языке математики, т.е. вводить правила грамматики и вывода, строить систему аксиом. Психика и сознание (как теоретические конструкты) могут оперировать только результатами этих математических операций. Никакая другая информация им просто недоступна.

В психических отражениях не может быть «ни грана» больше того, что есть в физиологической основе (Петр Гальперин).

Физиологи строят различные математические модели тех или иных процессов, которые, однако, меняются и уточняются. (Приведем для примера фрагмент истории математических моделей в сенсорной физиологии, следуя описанию Ю.Е. Шелепина. «*Вначале предполагали, что в основе всех процессов – локальный Фурье-анализ. Базисом послужила гипотеза Э. Маха, впервые высказавшего предположение, что входное изображение преобразуется в некий код, напоминающий Фурье-анализ. Гельмгольц считал, что Фурье-анализ справедлив для слуха, но не для зрительной системы. Позднее оказалось, что на самом деле и в слухе, и в зрении все похоже, но не совсем так. В зрительной системе осуществляется обработка, напоминающая обработку с помощью двумерных элементов Габора. Был разработан удобный алгоритм для вычисления…*» и т.д.). Какая именно математика в целом используется мозгом, пока мало понятно.

Математики, сталкиваясь с противоречиями, обязаны придумывать, как можно от них избавиться. Но ведь и «*сознание не терпит противоречий*», – так написал ещё в XIX в. К.Д. Ушинский и добавил, что это широко распространенное мнение. Иначе говоря, сознание ведет себя в соответствие с требованием, предъявляемым к языку математики.

Невозможность ужиться с противоречиями является сильнейшим двигателем сознания (Константин Ушинский).

Человеческий дух тяготится хаотическим разнообразием воспринимаемых им впечатлений, скучает непрерывно льющимся их потоком; они кажутся нам навязчивыми случайностями, и нам хочется уложить их в какое-либо русло, нами самими очерченное, дать им направление, нами указанное (Василий Ключевский).

Подробнее работу сознания с противоречиями мы обсудим позднее, когда дойдем до рассмотрения сознания как такового. Здесь лишь важно признать определенное родство языка математики и языка сознания.

О красоте математики

Однажды ученик спросил Эвклида: в чем польза от знания геометрии? Оскорбленный Эвклид велел рабу вернуть ученику деньги и больше не пускать на занятия. Математики часто подчеркивают, что самым ценным в их науке является не польза, а красота. Именно красота вдохновляет их на занятия математикой.

А. Пуанкаре ввел критерий «математического изящества» теорий для выбора лучшей из нескольких возможных. А. Эйнштейн предлагал оценивать теории по критерию внутреннего совершенства, придавая особое значение эстетическому впечатлению от «музыкальности» научной мысли.

Исследования, проводимые чистыми математиками, нередко находятся далеко от практического их использования и представляют собой красивые и изящные абстрактные математические системы. Они являются развивающимся видом искусства, способом выражения которого являются не слова, звуки или краски, а мысль (Лев Кудрявцев).

Математик, который не есть отчасти и поэт, никогда не будет настоящим математиком (Карл Вейерштрасс).

Математика является результатом действия таинственных сил, которых никто не понимает и в которых важную роль играет бессознательное постижение красоты. Из бесконечности решений математик выбирает одно за его красоту, а затем низводит его на землю (Игорь Стравинский, композитор).

Основная мощь теории тяготения Эйнштейна заключается в ее исключительной математической красоте (Поль Дирак).

Правда, никто не смог строго определить, что понимается под красотой, изяществом или совершенством. Но интуитивно это кажется достаточно ясным.

Смотрите:

$1^2 = 1$

$2^2 = 4 = 1+3$

$3^2 = 9 = 1+3+5$

$4^2 = 16 = 1+3+5+7$

$5^2 = 25 = 1+3+5+7+9$

И т. д.

Красиво? Смотрим дальше:

$1^3 = 1$

$2^3 = 8 = 3+5$

$3^3 = 27 = 7+9+11$

$4^3 = 64 = 13+15+17+19$

$5^3 = 125 = 21+23+25+27+29$

И т.д.

Никакого полезного смысла всё это, вроде бы, не имеет. Никто не будет складывать нечетные числа, чтобы возводить в квадрат или в куб. Но ведь действительно красиво!

Другой пример. Известны простые числа, которые делятся без остатка только на единицу и на самих себя, например *2, 11, 83, 199*. Натуральный ряд (ряд целых положительных чисел) бесконечен, так как к любому числу всегда можно прибавить единицу. Как доказать, что бесконечен и ряд простых чисел?

Эвклид предложил элегантное решение. Если простых чисел конечное число, то их можно перемножить. Прибавим к результату перемножения единицу. Полученное таким образом число будет обязательно простым: оно не может делиться ни на два (в остатке останется *1*), ни на три (в остатке останется *1*), ни на какое-либо другое число, кроме себя. Просто и красиво!

Нам никогда не удастся проверить [в опыте], *верно ли это утверждение Эвклида; однако мы верим в его истинность, поскольку мы верим в логические рассуждения. Если вы принимаете эти рассуждения, вам не остается выхода, вам придется согласиться с выводом Эвклида* (Дуглас Хофштадтер).

Однако вряд ли можно извлечь практическую пользу от знания того, что простых чисел бесконечно много.

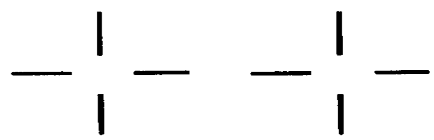
Последний пример. Все помнят теорему Пифагора: сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы. Предположим, что каждый катет равен *1 см*. Чему тогда равен квадрат гипотенузы? $1^2 + 1^2 = 2$. Следовательно, сама гипотенуза равна $\sqrt{2}$. Числовое значение величины гипотенузы лежит где-то между *1,41* и *1,42* ($1{,}41^2 = 1{,}9881$; $1{,}42^2 = 2{,}0164$). Попробуем вычислить точное значение. Обозначим длину гипотенузы как m/n. Если m и n имеют общие множители, предварительно разделим на них. Тогда или m, или n, или они оба вместе обязательно должны быть нечетными. Однако оказывается, что этого не может быть. Вот простое доказательство.

Итак, $(m/n)^2 = m^2/n^2 = 2$. Отсюда: $m^2 = 2n^2$. Следовательно, m^2 – четное, а потому и m – четное (ибо, как легко доказать, только четное число дает при возведении в квадрат четное число). Но если так, то можно представить m как $2p$. Подставляем в формулу: $m^2 = 4p^2 = 2n^2$; отсюда $2p^2 = n^2$, и оказывается, что n – тоже четное. Но это невозможно, ведь хотя бы одно из чисел должно быть нечетным. Пришли к выводу: нет числа, равного $\sqrt{2}$. Однако гипотенуза, равная $\sqrt{2}$, существует, а потому и само число тоже существует. Выход из противоречия – признать, что как бы долго мы ни делили m на n, мы никогда не достигнем точного значения $\sqrt{2}$. Раз деление может длиться бесконечно, то в десятичном выражении это означает, что у этого числа нет последней цифры после запятой. Так были открыты иррациональные числа. Открытие приписывается ученику Пифагора Гиппасу. Оно было настолько невероятно, что пифагорейцы, по легенде, то ли его убили, то ли изгнали из общины.

Поразительно: люди сами придумали числа, ведь в природе чисел нет, сами же придумали операции над ними. И вдруг оказалось, что при использовании стандартных операций появляются числа, о которых они ни сном, ни духом не подозревали. Разве всё это не потрясает воображение? В реальной жизни, тем не менее, никто не будет у $\sqrt{2}$ учитывать много знаков после запятой. Всегда делается округление, достаточное для решения практических задач. Все же в 2007 г. у $\sqrt{2}$ вычислили с помощью компьютера 200 миллиардов знаков после запятой, но последнюю цифру, как и ожидалось, не обнаружили.

Математики любят красоту. И это не удивительно, само наше сознание стремится к красоте. Гештальтисты называли это «законом хорошей формы», хотя строгого определения хорошей формы не дали. Тем не менее, их примеры впечатляют.

Посмотрите на рисунок.



В центре пересекающихся линий одни люди видят белый круг, другие – квадрат, хотя их изображения на рисунке нет. Почему видят то, чего нет? Потому что люди стремятся видеть цельные, замкнутые фигуры. Почему видят круг или квадрат, а не что-нибудь иное? Потому что люди предпочитают воспринимать фигуры, как простые, симметричные, однородные. Эти признаки и характеризуют «хорошую форму».

Законы гештальта свидетельствуют о стремлении восприятия к достижению наиболее простой в структурном отношении конфигурации (Рудольф Арнхейм).

Мы говорили, что познание направлено на то, чтобы находить упорядоченность и закономерности в окружающем мире. Эта направленность побуждает сознание везде искать упорядоченность, а значит стремиться к простоте, симметрии. Разумеется, и сознание математиков тоже стремится к простоте, симметрии и красоте. Впрочем, не стоит забывать, что *первоначальность и простота теоретических основ по сути дела только кажущиеся, для понимания в полной мере смысла соответствующих простых понятий и утверждений необходимо опираться на серьезнейшие математические теории… Формулировки основных положений в том случае, когда они очень просты, нередко создают у дилетантов иллю-*

зию полного понимания сути дела. Кажущаяся простота будит у них различные эмоции, панибратское обращение с существом проблем и неудержимое стремление использовать научные концепции как догматы или, наоборот, как еретические измышления (Леонид Седов).

Удивительно другое: самые крупные математические открытия, как правило, оказываются не только самыми красивыми, но и применимыми на практике в технике, в физике и в других науках.

«Непостижимая» эффективность математики

Но почему математика оказывается эффективной в познании мира? С чего вдруг какая-то игра в значки может лучше соответствовать реальности, чем опытные данные?

Современный математик зачастую совершенно не интересуется, соответствует ли его конструкция чему-то уже познанному. в окружающем мире. Им движет стремление усовершенствовать математику не как аппарат для описания чего-либо, а как аппарат вообще (Борис Бирюков, Виктор Тростников).

*Как так может быть, что мы [*математики*] с одной стороны гордимся тем, что построили прекрасный мир, полностью отгороженный от запросов реальности, а с другой – утверждаем, что наши идеи лежат в основе чуть ли не всех значительных технических достижений?* (Дэвид Мамфорд).

Ньютон, опираясь на законы Кеплера о движении планет и на собственные эксперименты, устанавливает закон всемирного тяготения: все тела притягиваются друг к другу пропорционально произведению их масс и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Сформулированный Ньютоном закон противоречил духу того времени, да и представлениям самого Ньютона. Он сам не понимал, как возможно, чтобы два произвольных тела, ничего не зная друг о друге, не имея представления о расстоянии между ними, притягивались друг к другу с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Закон всемирного тяготения, который Ньютон, не желая того, установил и который он мог проверить лишь с точностью около 4%, при проверке оказался правильным с точностью до 0,0001% (Юджин Вигнер).

Оказалось, что формула, выведенная Ньютоном с использованием совершенно абстрактного понятия второй производной, точнее полученных опытных данных. Как такое могло получиться?

Позднее Эйнштейн создаст общую теорию относительности, где из чисто математических соображений покажет, почему в формуле закона тяготения Ньютона сила притяжения должна быть обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами, а не, допустим, расстоянию в кубе. Потрясенные физики практически сразу приняли эту теорию, хотя ее эмпирических подтверждений к тому времени не было. Математические формулы оказываются могущественнее опыта.

Джеймс Максвелл решил придать уравнениям Фарадея, описывающим взаимодействие электрических и магнитных явлений, более красивый, более гармоничный вид. (Как выразился Р. Милликен, одел теорию Фарадея «*в изысканные математические одежды*»). Максвеллу пришлось при этом допустить, что существует электромагнитное поле, в котором электромагнитные волны распространяются на большие расстояния.

Однако еще долго после его открытия бытовало представление о нереальности электромагнитного поля как физического объекта, что такое поле – лишь математический трюк. А о распространении электромагнитных волн на большие расстояния вообще ничего не было известно. Пройдет несколько лет, прежде чем Г. Герц докажет это экспериментально. Причем сам Герц весьма скромно оценивал важность своего открытия, приведшее позднее к появлению радио, телевидения, микроволновых печей, мобильных телефонов и пр.

Это [открытие] *абсолютно бесполезно. Это только эксперимент, который доказывает, что маэстро Максвелл был прав. Мы всего-навсего имеем таинственные электромаг-*

нитные волны, которые не можем видеть глазом, но они есть (Герман Герц).

В 1928 г. Поль Дирак написал уравнение, в котором электрический заряд электрона стоял в квадрате (e^2). Согласно стандартным правилам извлечения квадратного корня он получил два значения: $+e$ и $–e$. О существовании электрона физики знали. А отрицательное решение, считали они, следует отбрасывать как не имеющее физического смысла и рассматривали $–e$ как математический курьёз. Дирак, однако, предположил, что возможно существуют не одна частица – электрон, а две частицы – электрон и позитрон с отрицательным и положительным зарядами. И в 1932 г. позитрон был экспериментально обнаружен.

Бывает, конечно, что математики конструируют и развивают такие системы, которые заранее кажутся им привязанными к реальности. Древнеиндийские математики, например, вводя в свои построения отрицательные числа, трактовали их как долг. Что, например, побудило Минковского ввести упомянутую выше аксиому о запрещенных прямых? На стандартном графике пути (S) по времени (t) прямая, перпендикулярная оси времени t, не имеет физического смысла, так как никакое перемещение невозможно без затрат времени. Минковский и строит геометрию, в которой такая прямая запрещена.

Поскольку, однако, скорость любого перемещения не может превосходить скорости света, то не только перпендикулярная к оси времени прямая не имеет физического смысла, но и любые прямые, предполагающие движение со скоростью, превосходящей скорость света. Минковский вводит аксиому о по крайней мере двух запрещенных прямых и доказывает, что если запрещены две прямые, то всех запрещенных прямых бесконечно много. В этой геометрии удачно описывается специальная теория относительности. В частности, движение по катетам в ней короче, чем по гипотенузе, что, в частности, объясняет парадокс близнецов: у близнеца, отправившегося в космический полет, время будет течь медленнее, чем у его брата, оставшегося дома.

Часто математики решают задачи, которые ставятся практиками. Например, с развитием техники связи надо было придумать способы сжатия информации, чтобы короче и без потерь передавать сообщения. К. Шеннон в конце 1940-х гг. предложил следующую идею. Пусть информация, которую вы хотите передать, – это всего лишь ответ «да» или «нет» на вопрос вашего собеседника. Чтобы передать эту информацию, достаточно передать *1* вместо «да» или *0* в значении «нет». Это – один бит информации. Пусть теперь вы хотите передать что-то более сложное на естественном языке. Поскольку в алфавите около *30* букв, а $2^5 = 32$, то для кодирования каждой буквы нужно *5* битов. Однако некоторые буквы встречаются гораздо чаще других, так что можно закодировать часто встречающиеся буквы более короткими последовательностями битов. Длину получающегося сжатого текста, обозначенного Шенноном как меру количества информации, можно подсчитать в битах.

Вопрос для размышления. В 1950-60-х гг. делались многочисленные попытки использовать эту меру Шеннона в психологических исследованиях. Однако мера Шеннона никак не учитывает значимость передаваемой информации. Результат подбрасывания монеты (орел или решка) – это такой же один бит информации, как и сообщение отцу ребенка, кто у него родился – сын или дочь. Только ли поэтому применение меры Шеннона в психологии оказалось не очень успешным?

Самих математиков, однако, не сильно волнует практическое применение идеи. Они стали развивать замысел Шеннона. Пусть закодированный текст T на передатчике – это программа P, порождающая после декодирования этот текст на приемнике. Можно ли найти такую программу, чтобы она была самой короткой? А.Н. Колмогоров доказал, и это признают замечательным результатом: кратчайшая программа P существует. Ее длина стала называться колмогоровской сложностью текста.

Однако декодирование текста T даже при кратчайшей P может потребовать очень больших временных затрат. Вот простой пример:

если *T* – это последовательность из $(10^{10})^{10}$ единиц, то достаточно передать именно эту фразу, но ведь адресат будет вынужден ее декодировать и распечатать $(10^{10})^{10}$ символов «*1*». Самое главное и самое чудовищное: доказано, что не существует универсального алгоритма, способного создать программу *P* для любого произвольного текста. Тем самым, «*колмогоровская сложность, будучи красивым математическим понятием, не может дать практической меры количества информации*» (Ю.И. Манин). Однако сколько еще теорем про нее удалось доказать!

Чаще, однако, так называемые «чистые» математики (термин начала XIX в.) создают какую-либо математическую систему, а потом уже либо они сами, либо другие математики и физики интерпретируют ее на реальности, приписывая ничего не значащим значкам физическое значение. Максвелл называл это научными метафорами. Приведем шутливый пример, который, тем не менее, показывает, как физики-теоретики строят такие научные метафоры. Дирак, поверивший в физический смысл *–e* и, тем самым, предсказавший существование позитрона, еще в студенческие годы демонстрировал умение абстрактным математическим значкам приписывать физический смысл.

Была дана задача. Рыбаки целый день ловили рыбу, а вечером, сложив улов на берегу, легли спать. Однако одному из них не спалось, и он решил уехать, забрав свою часть улова. Пересчитав улов, рыбак разделил всю рыбу на три части. При этом одна рыба оказалась лишней. Рыбак бросил ее в воду, забрал свою долю и уехал домой. Среди ночи проснулся второй рыбак, и, не заметив отсутствия первого товарища, разделил оставшуюся рыбу на три части, одну лишнюю тоже бросил в воду, забрал свою часть и ушел. Так же, под утро, не заметив, что остался один, поступил третий рыбак. В задаче спрашивалось, какое наименьшее количество рыб выловили рыбаки. Стандартное решение: рыб было *25*. Дирак предложил более остроумное решение: рыб было минус две. После того как первый рыбак швырнул одну рыбу в воду, их стало *–2 –1 = –3*. Тогда он поделил рыб на три части и ушел, унося с собой *–1* рыбу. Рыб опять стало *–2*. Так поступили и второй, и третий рыбаки. Дирак, тем самым, умудрился приписать отрицательному количеству рыб физический смысл.

Допустим, удалось создать удачные научные метафоры, и все неопределяемые знаки математической системы интерпретировать на реальности. Если при этом обнаруживается соответствие структуры взаимоотношений значков и структуры взаимоотношений фрагментов реальности (изоморфизм), тогда доказанные в математической системе теоремы можно интерпретировать как законы природы.

Мы можем говорить о незначащей интерпретации, которая не устанавливает никакой изоморфной связи между теоремами системы и реальностью. Подобных интерпретаций сколько угодно: годится любой случайный выбор. Другой тип интерпретации может быть назван значащим. В такой интерпретации теоремы и истины совпадают – то есть между теоремами и фрагментами реальности существует изоморфизм (Дуглас Хофштадтер).

Достаточно подтвердить в опыте верность некоторых из математически выведенных законов, как оказывается, что все выведенные теоремы этой системы, как правило, будут верны в реальности, все они будут работающими законами. Именно поэтому, выводя на кончике пера новые теоремы, становится возможным получать новые физические следствия.

Эффективность математики в познании реальности проявляется и в том, что одна и та же структура может быть изоморфна совершенно разным фрагментам реальности – *«выявляются крайне неочевидные взаимосвязи между вещами»* (А. Уайтхед). Ш. Кулон решил измерить силу притяжения/отталкивания между электрическими зарядами. Однако величину заряда тогда не умели измерять (сегодня она измеряется в *кулонах*). Ш. Кулон поступил так: он наэлектризовал шар, приложил к нему другой такой же шар и решил, что заряд распределился поровну между этими шарами, поэтому в каждом шаре величина заряда уменьшилась в два раза. Затем к одному из этих шаров приложил другой такой же шар, теперь заряд каждого из этой пары шаров стал еще вполовину меньше и т.д. Никакого обоснования, почему заряды распределяться между шарами поровну, не было.

Тем не менее, получив таким образом заряды разной величины, Ш. Кулон измерил силу взаимодействия. Оказалось, что сила притяжения (и отталкивания) пропорциональна произведению величин их зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Ш. Кулон пришел в восторг. Сходство с законом всемирного тяготения уверило его в правильности как сделанного предположения, так и самого открытого им закона.

В психологии не так много законов, выраженных в математической форме. Часть этих законов предполагает логарифмическую зависимость. Закон Фехнера, например, гласит: величина ощущения пропорциональна логарифму интенсивности раздражителя. Этот закон опирается на данные, что человек, сравнивая интенсивность двух раздражителей, замечает не абсолютную разницу раздражителей, а относительную, зависящую от исходной интенсивности первого раздражителя.

Для груза весом в *30 г* необходимо добавить *1 г*, чтобы возникло ощущение, что груз стал тяжелее. Для груза в *300 г* уже надо добавить вес в *10 г*. А при исходном весе в *3 кг* потребуется дополнительный вес в *100 г*. Благодаря закону Фехнера и громкость звука, и яркость звезд на небе, и многое другое измеряется в логарифмической шкале. (Мы позднее подробнее обсудим перипетии этого закона).

Теперь предъявим испытуемому стимул, на который он должен как можно быстрее реагировать нажатием на соответствующую стимулу кнопку. Закон Хика: если стимул предъявляется из небольшого набора стимулов, то с добавлением в набор каждого нового стимула время реакции испытуемого возрастает пропорционально логарифму от числа стимулов. На один стимул из трех возможных вариантов он реагирует быстрее, чем на один стимул из четырех вариантов. Существует ли родство между двумя этими законами? К сожалению, психологи не ставят подобных вопросов. Прежде всего потому, что закон Фехнера относится к психофизике, а закон Хика – к психомоторике, а это разные разделы общей психологии.

«*Непостижимая эффективность математики в естественных науках*» – озаглавит одну из самых известных своих статей Ю. Вигнер. Но столь ли непостижимая? Математические системы, как и сознание, избегают противоречия. Если часть непротиворечивой системы соответствует реальности, то разве так уж удивительно, что реальности может соответствовать и вся система? (Космолог М. Тегмарк – наверное, с перепугу – даже предположил, что «*все математически непротиворечивые структуры существуют физически*»).

Подведем итог: путь познания с использованием неопределяемых знаков и произвольных правил их преобразований при удачной интерпретации на реальности оказывается необычайно эффективным. Поэтому и психика, и сознание несмотря на то, что они оперируют только поступающим к ним ничего не значащими сигналами, в итоге так же, как и математики, могут достигать «непостижимой эффективности» в познании реальности.

Продолжение следует…